UNIVERSITÄT BIELEFELD

Wintersemester 2026/2027
Marco Rehmeier
Emanuela Gussetti
Sandro Wichmannn–Podehl

Übungen zu *Daten und Zufall*

Blatt 1
Tutorium Woche 26.-30.10.2026
keine Abgabe

Dieses Übungsblatt soll Ihnen Gelegenheit geben, einige Grundlagen mathematischer Sprache und Werkzeuge zu wiederholen, die für unsere Vorlesung relevant sein werden.

Erinnerung: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ bezeichnen die Mengen der *natürlichen*, bzw. *rationalen*, bzw. *reellen* Zahlen. Das Symbol $\in$ bedeutet *Element von*, also etwa: $16 \in \mathbb{N}$, $\frac{5}{9} \in \mathbb{Q}$, $\pi \in \mathbb{R}$. Die Negation einer solchen Enthaltensrelation wird mittels $\notin$ ausgedrückt, etwa $\pi \notin \mathbb{Q}$. Wir legen die Konvention $0 \notin \mathbb{N}$ fest und schreiben $\mathbb{N}_0$ für die Menge $0 \cup \mathbb{N}$. Ist eine Menge M in einer anderen Menge N enthalten (gilt also für jedes Element $x \in M$ auch $x \in N$), so schreiben wir $M \subseteq N$. Es ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$ ist das *abgeschlossene Intervall* $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$. Die Menge, die kein Element enthält, heißt *leere Menge* und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.

Aufgabe 1. (**4 Punkte**) [Mathematische Sprache und Quantoren]

(i) Wiederholen Sie gemeinsam den Begriff der *halboffenen* und *offenen* Intervalle $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), sowie der unbeschränkten Intervalle $(-\infty, b), (-\infty, b], (a, +\infty)$ und $[a, +\infty)$.

(ii) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in mathematisch-logischer Schreibweise und prüfen Sie deren Gültigkeit.

Beispiel: Die Menge aller natürlichen Zahlen, die echt kleiner als 7 sind, ist in der Menge der nicht-negativen rationalen Zahlen enthalten: etwa $\{n \in N : n < 7\} \subseteq \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leqslant q\}$*, oder* $\mathbb{N} \cap \{x \in \mathbb{R} : x < 7\} \subseteq \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$ *(es gibt weitere korrekte Darstellungen dieser Aussage); die Aussage ist wahr.*

1. Die Menge der rationalen Zahlen, die sowohl größer gleich drei und echt kleiner 18,9 sind, ist enthalten in der Menge der reellen Zahlen, die kleiner gleich 18,9 sind.

2. Die Menge der geraden natürlichen Zahlen kleiner gleich 55 ist enthalten in der Menge der reellen Zahlen, die echt kleiner als 54 sind.

3. Die Menge der rationalen Zahlen, die von der Form $k\pi$ mit k aus $\mathbb{N}_0$ sind, ist leer.

Aufgabe 2. (**4 Punkte**) [Summen und Reihen]

Für endlich viele reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_N$ schreibt man $\sum_{i=1}^{N} x_i := x_1 + \cdots + x_N$. Für unendlich viele reelle Zahlen ist im Allgemeinen nicht klar, ob und wie ihre Summe definiert ist. Oft sind die zu summierenden Zahlen nicht anhand durchnummerierter Indizes gegeben, sondern als Elemente einer Menge M. Dann schreibt man $\sum_{x \in M} x$ (muss jedoch sicherstellen, dass diese Summe wohldefiniert ist, siehe unten).

(i) Wiederholen Sie gemeinsam: Die *Kardinalität* oder *Mächtigkeit* einer Menge M wird mit $|M|$ bezeichnet. Falls M endlich viele Elemente hat (also etwa keins, eins, zwei, ...), so ist $|M|$ die Anzahl der (verschiedenen!) Elemente in M. Etwa ist also $|M_1| = 4$ für $M_1 =$

$\{1, 2, 4, 8\}$. Falls Elemente in einer Menge doppelt aufgeschrieben wurden, werden sie nur einfach gezählt, also $|M_2| = 2$ für $M_2 = \{1, 9, 1, 1, 9\}$. Enthält M unendlich viele Elemente (etwa $M = \mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$), schreibt man $|M| = \infty$, aber es ist wichtig, präziser zu unterscheiden: Eine Menge heißt *abzählbar unendlich*, falls es eine Bijektion zwischen M und $\mathbb{N}$ gibt. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendliche Mengen, $\mathbb{R}$ hingegen nicht. Eine Menge, die unendlich, aber nicht abzählbar unendlich viele Elemente enthält, heißt *überabzählbar*.

(ii) Wiederholen Sie gemeinsam: Summen von überabzählbar vielen reellen Zahlen, also etwa die Summe aller positiven reellen Zahlen, sind (zumindest im Kontext unserer Vorlesung) nicht definiert. Summen von abzählbar unendlichen Mengen sind unter gewissen Voraussetzungen definiert und werden *unendliche Reihen* genannt. Die unendliche Reihe über abzählbar viele nicht-negative Summanden ist stets definiert. Etwa gilt

1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} n = \infty$
2. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

Insbesondere können unendliche Reihen einen endlichen Wert haben.

(iii) Ist nun eine Menge von Zahlen $x_{n,k} \in \mathbb{R} \cap [0, \infty)$ gegeben, wobei n und k aus jeweils endlichen oder abzählbar unendlichen Indexmengen N und K kommen, so ist die Doppelreihe $\sum_{n\in N} \sum_{k\in K} x_{n,k}$ definiert und es gilt

$$\sum_{n\in N} \sum_{k\in K} x_{n,k} = \sum_{k\in K} \sum_{n\in N} x_{n_k} = \sum_{(n,k)\in N\times K} x_{n_k}.$$

Aufgabe 3. (**4 Punkte**) [Konvergenz und Grenzwerte in $\mathbb{R}$]

Wiederholen Sie gemeinsam die Begriffe *Konvergenz* und *Grenzwert* einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, sowohl anschaulich als auch mathematisch präzise.

Aufgabe 4. (**4 Punkte**) [Vollständige Induktion]

Wiederholen Sie gemeinsam das Beweisprinzip der vollständigen Induktion. Üben Sie anschließend mithilfe der folgenden Aufgabe:

Zeigen Sie mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion: für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n$ gerade.